Logo di Stefano Visciglia

CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE
E
DEL COMUNE DI TORINO

GARA PER IL PUBBLICO

8 Gallery – Venerdì 12 marzo 2010

OLIMPIADI DI MATEMATICA

Problema 1 – I dadi 20 punti

Luigi lancia contemporaneamente un dado a sei facce e tre monete. Qual è la probabilità che, per tre volte consecutive, Luigi ottenga due teste e una croce con le monete e un numero primo sulla faccia superiore del dado? Si richiedono le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.
N.B. Il numero UNO non è considerato fra i numeri primi.

Problema 2 – Le foto: che passione! 20 punti

Una macchina sviluppa un rullino fotografico in 6 minuti e 20 secondi, ma può trattare soltanto un rullino alla volta. Un laboratorio fotografico possiede 3 macchine di questo tipo ed un signore entra portando 10 rullini da sviluppare e stampare. Dopo quanti secondi il signore potrà ritirare tutte le sue foto?

Problema 3 – Sulle orme di Raymond Smullyan 25 punti

Si tratta di accertare la colpevolezza o meno di alcuni sospettati in un caso di furto.
In questo caso sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, e D.
Furono accertati i seguenti fatti:

(1) Se A è colpevole, allora B fu suo complice.
(2) Se B è colpevole, allora o C fu suo complice oppure A è innocente.
(3) Se D è innocente, allora A è colpevole e C è innocente.
(4) Se D è colpevole, lo è anche A.

Quali sono colpevoli e quali innocenti?
Scrivi la risposta come sequenza di 1 e di 0, dove 1 significa "colpevole" e 0 significa "innocente"; se ad esempio A, B e D fossero colpevoli e C innocente la risposta sarebbe 1101.

Problema 4 – Il satellite 25 punti

Un satellite geostazionario per telecomunicazioni si trova in orbita posizionato sulla verticale di una località situata all'equatore ad una distanza di 800 *km* dalla superficie terrestre. Ad un certo istante, per un problema tecnico, il satellite inizia a ruotare su se stesso con un periodo di rotazione di 12 minuti. Quanti chilometri percorre il satellite nello spazio dopo 8 rotazioni complete? Si supponga il raggio della terra pari a 6300 *km* e si assuma $\pi = 3{,}14$. Non si tenga conto del moto di rivoluzione della terra intorno al sole.

Problema 5 – E Giacomo ? 25 punti

Due amici, Aldo e Giovanni, escono contemporaneamente dalle loro abitazioni, distanti 2000 *m*. per incontrarsi a metà dell'unica strada percorribile (viaggiano entrambi ad una velocità costante di 2 *m/sec*). Zip, il cane di Aldo, che viaggia alla velocità costante di 6 *m/sec*., parte contemporaneamente ad Aldo e, appena incontra Giovanni, inverte il suo moto e ritorna verso Aldo; incontrato Aldo inverte nuovamente il suo moto per dirigersi verso Giovanni e così via fino a quando i due amici non si incontrano. Quanti metri percorre in totale Zip?

Problema 6 – Un po' di geometria 30 punti

Un esagono regolare è inscritto in una circonferenza. Si sa che l'area della parte di cerchio esterna all'esagono misura $\frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{\pi^2} cm^2$. Quali sono le prime quattro cifre (senza considerare la virgola) dello sviluppo decimale della lunghezza del raggio della circonferenza in centimetri?
Si approssimi π con 3,14.

Problema 7 – Leggere fa bene…! 30 punti

Carletto vuole spendere tutti i soldi ricevuti come regalo per il suo compleanno in una grande libreria. Acquistando solo fumetti (ciascuno del costo di 7€) avanzerebbe 4€, mentre acquistando solo libri fantasy (ciascuno del costo di 8€) gli rimarrebbero in tasca 5€. A quanto ammonta il suo budget, sapendo che esso è compreso fra i 130€ e i 200€ ?

Problema 8 – Il Carnevale di Venezia 30 punti

Durante il Carnevale di Venezia del 1706, il maggiordomo di un ricco mercante di spezie è incaricato di consegnare a tutta la nobiltà della città l'invito per il gran ballo in maschera che dovrà tenersi la sera stessa nella casa del suo padrone. Vagando per le calle di Venezia incontra un gruppo di quattro persone che indossano vestiti sfarzosi ma mascherati ed irriconoscibili; questi, per burlarsi del pover'uomo, non svelano la loro vera identità, ma affermano ciascuno due cose, una delle due sicuramente vera, l'altra sicuramente falsa:

A: "Io sono un semplice parroco. Almeno tre di noi non sono nobili"
B: "Due di noi non sono nobili . Io sono un principe"
C: "Io sono un principe. D mente sempre"
D: "Solo uno di noi non è nobile. Io sono un mercante"

Scrivi la risposta come sequenza di 1 e di 0, dove 1 significa "nobile" e 0 significa "comune"; se ad esempio A, B e D fossero nobili e C comune la risposta sarebbe 1101.

Problema 9 – Una scelta difficile 30 punti

La signora Bianchi si sta recando in auto a fare la spesa in un centro commerciale che dista 20 *Km* da casa sua. Arrivata a metà strada si ricorda di aver dimenticato il rubinetto dell'acqua del giardino aperto. Le conviene proseguire e fare la spesa, oppure tornare a casa per chiudere il rubinetto e poi andare a fare la spesa più tardi? Supponiamo che viaggi a velocità costante v espressa in *Km*/*h*, che la spesa per l'acqua sia pari ad 1€/*h*, che la spesa per la benzina sia pari a $(0{,}04+0{,}001v)$€/*Km*, e che il tempo necessario per fare la spesa sia di mezz'ora. Indicare la velocità minima v_{min} alla quale la signora deve viaggiare in auto in modo che non le convenga tornare subito a casa.

Problema 10 – Il treno 30 punti

Un treno che viaggia lungo la ferrovia che collega Genova a Savona è osservato da Marco che si trova su una barca, ferma in acqua; ad un certo momento il treno entra in una galleria e scompare alla vista di Marco per 26 secondi. Dopo un po' di tempo un secondo treno identico al primo, che si muove in direzione opposta, entra nella stessa galleria e anche in questo caso scompare alla vista di Marco per 26 secondi. Qualche giorno dopo un amico di Marco, che si trovava proprio su uno dei due treni, gli dice che quando i due treni si sono incrociati, per vedere passare dal finestrino tutto l'altro treno sono passati 4 secondi. Sapendo che la galleria è lunga 850 metri e supponendo che la velocità dei treni sia sempre costante, a che velocità (misurata in chilometri orari) viaggiava il treno dell'amico di Marco?

Problema 11 – La collezione 35 punti

Andrea colleziona piccoli modellini e li vuole sistemare in una bacheca quadrata, suddivisa in cellette quadrate tutte uguali fra loro. Procedendo per tentativi osserva che con una bacheca con x cellette per lato gli rimangono da sistemare 43 modellini, mentre con una bacheca con y cellette per lato gli restano 76 cellette vuote. Qual è il numero minimo di modellini che potrebbe possedere Andrea?

Problema 12 – Gli Onorevoli 35 punti

Ciascuno dei cinquecento Onorevoli della sfortunata Repubblica di Matematti, mentre siede nel suo seggio al Parlamento, fa le seguenti affermazioni. 1° Onorevole: “Non ci sono sinceri tra noi”, 2°: “C'è al massimo una persona sincera tra noi”, 3°: “Ci sono al massimo due persone sincere tra noi”, ..., 499°: “Ci sono al massimo 498 persone sincere tra noi”, 500° “Ci sono al massimo 499 persone sincere tra noi”. Quanti sono gli Onorevoli di nome e di fatto (cioè quelli sinceri..)?

Problema 13 – Diamo i numeri? No, le cifre! 40 punti

Quali sono le prime quattro cifre (da sinistra, base dieci) del numero $2010^{15}:40401^{7}$?

Problema 14 – Un polinomio “attuale” 40 punti

Sia dato il polinomio $p(x) = (x\text{-}1)(x\text{-}2)(x\text{-}3)\ldots(x\text{-}2010)+ 20x^2 + 10$. Dopo che è stato portato in forma normale (ossia dopo che è stato espresso come somma di monomi non simili), quanto vale la somma dei suoi coefficienti?

Problema 15 – Il frutteto 45 punti

Antonio possiede un frutteto di forma circolare avente raggio 3 decametri. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano avente come origine il centro del frutteto. Antonio vuole piantare un albero in ogni punto del frutteto avente coordinate intere (espresse in decametri). Assumendo per semplicità che tutti gli alberi siano cilindri di uguale raggio r e centro di coordinate intere (espresse in decametri), determinare il massimo valore di r in modo tale che, ponendosi al centro del frutteto (origine degli assi), sia possibile vedere orizzontalmente all’esterno del frutteto in almeno una direzione. Si esprima il risultato in millimetri.

Problema 16 – I pirati 50 punti

17 pirati rubano un sacco pieno di monete d'oro. Iniziano a dividerle in parti uguali, ma si accorgono che ne avanzano 3. Inizia quindi una rissa furibonda per suddividersi le monete rimaste. Nel corso della rissa un pirata rimane ucciso. I pirati suddividono nuovamente il bottino in parti uguali, ma si accorgono che ne avanzano 10. Nasce una nuova rissa nel corso della quale un altro pirata viene ucciso. A questo punto i pirati riescono finalmente a suddividere le monete in parti uguali. Qual è il numero minimo di monete che poteva contenere il sacco?

Problema 17 – Un problema di aritmetica 50 punti

Quanti sono gli interi n, con $1 \leq n \leq 2010$ tali che n^2+1 sia divisibile per 13?

Problema 18 – Il calendario Maya 50 punti

Il calendario degli antichi Maya usa un sistema detto *Lungo computo* per contare i giorni a partire dall'inizio dell'era Maya: i giorni seguono una numerazione progressiva basata su un sistema posizionale misto nelle basi 13 (tredici), 18 (diciotto) e 20 (venti). Più precisamente ogni data è espressa da un numero di cinque cifre: la prima (quella delle "unità" più a destra) in base 20, la seconda (quella delle "decine") in base 18, la terza e la quarta in base 20, e la quinta in base 13.
Un esempio di data è 12.19.14.1.5; il giorno seguente è il 12.19.14.1.6, … il giorno successivo al 12.19.14.1.19 è il 12.19.14.2.0, … il giorno successivo al 12.19.14.17.19 è il 12.19.15.0.0 e così via.
Il 20 dicembre 2012 è il giorno 12.19.19.17.19 e rappresenta, secondo i Maya, la fine di un'era del mondo. L'era successiva inizia il 21 dicembre 2012. Quale è la data di oggi 12 marzo 2010 secondo il calendario Maya?
Per fornire la risposta si scrivano le ultime quattro cifre a destra ignorando i punti; per esempio se la data fosse il 12.19.11.5.7 si scriva 1157, se fosse il 12.19.1.0.8 si scriva 9108.

Problema 19 – Un poligono "attuale" 60 punti

Si consideri nel piano cartesiano una circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1. In essa sia inscritto un poligono regolare avente 2010 lati e uno dei vertici nel punto $P_0(1,0)$. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_{2009}$ gli altri vertici. Indichiamo con x_n l'ascissa del punto P_n. Quanto vale $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2008}^2 + x_{2009}^2$?

Problema 20 – Calcolo enigmatico **70 punti**

```
□□□□  :  □   =  □□□□
  :      ×        −
  □  ×  □□   =   □□□
―――――――――――――――――――――
 □□□ + □□□  =   □□□
```

A segno uguale corrisponde cifra uguale (a segno diverso corrisponde cifra diversa).

Quale numero corrisponde alla stringa □□□□ ?