Logo di Stefano Visciglia

CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE
E
DEL COMUNE DI TORINO

GARA PER IL PUBBLICO

8 Gallery – Venerdì 12 marzo 2010

OLIMPIADI DI MATEMATICA

Problema 1 – I dadi 20 punti

Luigi lancia contemporaneamente un dado a sei facce e tre monete. Qual è la probabilità che, per tre volte consecutive, Luigi ottenga due teste e una croce con le monete e un numero primo sulla faccia superiore del dado? Si richiedono le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.
N.B. Il numero UNO non è considerato fra i numeri primi.

Soluzione.

$$P = \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{6}\right)^3 = 0{,}006591796875$$

Risposta: $\boxed{0065}$

Problema 2 – Le foto: che passione! 20 punti

Una macchina sviluppa un rullino fotografico in 6 minuti e 20 secondi, ma può trattare soltanto un rullino alla volta. Un laboratorio fotografico possiede 3 macchine di questo tipo ed un signore entra portando 10 rullini da sviluppare e stampare. Dopo quanti secondi il signore potrà ritirare tutte le sue foto?

Soluzione.

L'errore che si può compiere per la fretta di risolvere l'esercizio è quello di moltiplicare il tempo per stampare un rullino (380*s*) *per il numero di rullini* (10) *e dividere quindi per il numero delle macchine del fotografo* (3). *In questo modo si otterrebbe:*

$(380 \times 10:3)s \cong 1266{,}67s$

In realtà occorre pensare che i primi 9 *rullini possono effettivamente essere trattati in contemporanea dalle macchine, ma l'ultimo non può essere suddiviso tra le* 3 *macchine e quindi deve essere considerato a parte.*
La soluzione corretta è quindi

$(380 \times 9:3 + 380)s = 1520s$

Risposta: $\boxed{1520}$

Problema 3 – Sulle orme di Raymond Smullyan 25 punti

Si tratta di accertare la colpevolezza o meno di alcuni sospettati in un caso di furto.
In questo caso sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, e D.
Furono accertati i seguenti fatti:

1. Se A è colpevole, allora B fu suo complice.
2. Se B è colpevole, allora o C fu suo complice oppure A è innocente.
3. Se D è innocente, allora A è colpevole e C è innocente.
4. Se D è colpevole, lo è anche A.

Quali sono colpevoli e quali innocenti?
Scrivi la risposta come sequenza di 1 e di 0, dove 1 significa "colpevole" e 0 significa "innocente"; se ad esempio A, B e D fossero colpevoli e C innocente la risposta sarebbe 1101.

Soluzione 1 (dell'Autore)

*La risposta è che sono **tutti colpevoli**. Per l'affermazione* (3), *se* D *è innocente, allora* A *è colpevole. Per la* (4), *se* D *è colpevole, anche* A *è colpevole. Quindi indipendentemente dal fatto che* D *sia innocente o colpevole,* A *deve essere colpevole. Da cui, per la* (1), *anche* B *è colpevole. Per la* (2) *o* C *è colpevole oppure* A *è innocente. Ma noi sappiamo già che* A *non è innocente, quindi* C *deve essere colpevole. Infine, per la* (3), *se* D *è innocente lo è anche* C. *Però abbiamo provato che* C *non è innocente e quindi* D *deve essere colpevole. In conclusione sono tutti colpevoli.*

Soluzione 2 (utilizzo delle tavole di verità)

Formalizziamo dapprima le frasi:

Si intenda A = "A è colpevole", ecc. 0 = FALSO
$\neg$ A = "A è innocente", ecc. 1 = VERO

Avremo:

(1) $A \rightarrow B$
(2) $B \rightarrow (C \vee \neg A)$
(3) $\neg D \rightarrow (A \wedge \neg C)$
(4) $D \rightarrow A$

Costruiamo la tavola di verità:

A	B	C	D	¬ A	¬C	¬D	(1) A → B	C ∨ ¬A	(2) B → (C ∨ ¬A)	A ∧ ¬C	(3) ¬D → (A ∧ ¬C)	(4) D → A
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Solo l'ultima riga soddisfa tutte le condizioni ed in essa si nota che A,B,C,D *sono tutti colpevoli* (*valori di verità* = 1).

Risposta: 1111

Problema 4 – Il satellite 25 punti

Un satellite geostazionario per telecomunicazioni si trova in orbita posizionato sulla verticale di una località situata all'equatore ad una distanza di 800 *km* dalla superficie terrestre. Ad un certo istante, per un problema tecnico, il satellite inizia a ruotare su se stesso con un periodo di rotazione di 12 minuti. Quanti chilometri percorre il satellite nello spazio dopo 8 rotazioni complete? Si supponga il raggio della terra pari a 6300 *km* e si assuma $\pi = 3{,}14$. Non si tenga conto del moto di rivoluzione della terra intorno al sole.

Soluzione.

Per prima cosa occorre calcolare la velocità di rotazione del satellite nello spazio: dal momento che il satellite percorre un' orbita solidale con un punto della superficie terrestre, il suo periodo di rotazione sarà esattamente di 24 ore; assumendo inoltre che l'orbita sia esattamente circolare abbiamo che lo spazio percorso sarà

$$2\pi(6300+800)km = 44588km$$

Si ottiene così una velocità

$$v_s = \frac{44588km}{24h} = \frac{44588km}{24 \cdot 3600s} = 0{,}51606\overline{481}kms^{-1}$$

A questo punto basta calcolare il tempo delle 8 rotazioni e, considerando che, per le ipotesi fatte, il moto del satellite è circolare uniforme, si ricava facilmente il numero di km percorsi:

$$D_s = (8 \cdot 12 \cdot 60s)v_s = 5760s \cdot 0{,}51606\overline{481}kms^{-1} = 2972{,}5\overline{3}km$$

Risposta: $\boxed{2972}$

Problema 5 – E Giacomo ? 25 punti

Due amici, Aldo e Giovanni, escono contemporaneamente dalle loro abitazioni, distanti 2000 *m*. per incontrarsi a metà dell'unica strada percorribile (viaggiano entrambi ad una velocità costante di 2 *m/sec*). Zip, il cane di Aldo, che viaggia alla velocità costante di 6 *m/sec*., parte contemporaneamente ad Aldo e, appena incontra Giovanni, inverte il suo moto e ritorna verso Aldo; incontrato Aldo inverte nuovamente il suo moto per dirigersi verso Giovanni e così via fino a quando i due amici non si incontrano. Quanti metri percorre in totale Zip?

Soluzione.

I due amici si incontreranno dopo 500 secondi (tempo necessario per percorrere 2000 *m*. alla velocità di 4 *m/sec*, somma delle velocità di Aldo e Giovanni). In 500 secondi il cane percorre (500*6)*m* = 3000*m*.

Risposta: $\boxed{3000}$

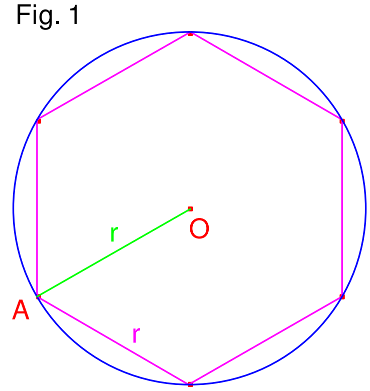
Problema 6 – Un po' di geometria 30 punti

Un esagono regolare è inscritto in una circonferenza. Si sa che l'area della parte di cerchio esterna all'esagono misura $\frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{\pi^2} cm^2$. Quali sono le prime quattro cifre (senza considerare la virgola) dello sviluppo decimale della lunghezza del raggio della circonferenza in centimetri?
Si approssimi π con 3,14.

Soluzione.

Si può ottenere il valore del raggio esprimendo l'area della parte di cerchio esterna all'esagono (vedi Fig.1) come differenza fra l'area dell'intero cerchio e quella dell'esagono (che, essendo regolare, ha lato pari al raggio del cerchio):

Fig. 1



$$\pi r^2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{\pi^2}$$

$$r^2 = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{2}{2\pi - 3\sqrt{3}}$$

Dopo un'opportuna semplificazione si ottiene:

$$r = \frac{4}{\pi} \cong 1{,}27388535$$

Risposta: $\boxed{1273}$

Problema 7 – Leggere fa bene…! 30 punti

Carletto vuole spendere tutti i soldi ricevuti come regalo per il suo compleanno in una grande libreria. Acquistando solo fumetti (ciascuno del costo di 7€) avanzerebbe 4€, mentre acquistando solo libri fantasy (ciascuno del costo di 8€) gli rimarrebbero in tasca 5€. A quanto ammonta il suo budget, sapendo che esso è compreso fra i 130€ e i 200€ ?

Soluzione.

x =165 *è l'unica soluzione del sistema:*

$$\begin{cases} 130 \leq x \leq 200 \\ x = 7f + 4 \\ x = 8l + 5 \end{cases} \qquad \textit{con } f \textit{ e } l \textit{ numeri interi}$$

Risposta: $\boxed{0165}$

Problema 8 – Il Carnevale di Venezia 30 punti

Durante il Carnevale di Venezia del 1706, il maggiordomo di un ricco mercante di spezie è incaricato di consegnare a tutta la nobiltà della città l'invito per il gran ballo in maschera che dovrà tenersi la sera stessa nella casa del suo padrone. Vagando per le calle di Venezia incontra un gruppo di quattro persone che indossano vestiti sfarzosi ma mascherati ed irriconoscibili; questi, per burlarsi del pover'uomo, non svelano la loro vera identità, ma affermano ciascuno due cose, una delle due sicuramente vera, l'altra sicuramente falsa:

A: "Io sono un semplice parroco. Almeno tre di noi non sono nobili"
B: "Due di noi non sono nobili . Io sono un principe"
C: "Io sono un principe. D mente sempre"
D: "Solo uno di noi non è nobile. Io sono un mercante"

Scrivi la risposta come sequenza di 1 e di 0, dove 1 significa "nobile" e 0 significa "comune"; se ad esempio A, B e D fossero nobili e C comune la risposta sarebbe 1101.

Soluzione.

La coppia di frasi da cui partire è quella detta da C*: poiché la seconda è falsa (per ipotesi una delle affermazioni di* D *è vera), la prima è vera. La seconda affermazione di* A *è falsa (se fosse vera, dovrebbe essere vera anche la prima, essendo* C *un principe), quindi la prima è vera. Se la seconda affermazione di* D *fosse vera, le due affermazioni di* B *sarebbero entrambe vere. Quindi l'unico a non essere nobile è* A*, e la risposta è* 0111.

Risposta: 0111

Problema 9 – Una scelta difficile 30 punti

La signora Bianchi si sta recando in auto a fare la spesa in un centro commerciale che dista 20 *Km* da casa sua. Arrivata a metà strada si ricorda di aver dimenticato il rubinetto dell'acqua del giardino aperto. Le conviene proseguire e fare la spesa, oppure tornare a casa per chiudere il rubinetto e poi andare a fare la spesa più tardi? Supponiamo che viaggi a velocità costante v espressa in *Km/h*, che la spesa per l'acqua sia pari ad 1€/*h*, che la spesa per la benzina sia pari a $(0{,}04+0{,}001v)$€/*Km*, e che il tempo necessario per fare la spesa sia di mezz'ora. Indicare la velocità minima v_{min} alla quale la signora deve viaggiare in auto in modo che non le convenga tornare subito a casa.

Soluzione.

Nel caso in cui la signora prosegua a fare la spesa, percorrerà 30 *Km e la spesa sarà pari a* $(0{,}04+0{,}001v)30$ € *per la benzina e a* $(1/2+30/v)$ € *per l'acqua. Se invece torna indietro, percorrerà* 10+20+20=50 *Km e spenderà* $(0{,}04+0{,}001v)50$ € *per la benzina* e $10/v$ € *per l'acqua. Non le converrà tornare indietro se* $(0{,}04+0{,}001v)30 + (1/2+30/v) \leq (0{,}04+0{,}001v)50 + 10/v$.
Con semplici calcoli si perviene a $v^2+15v-1000 \geq 0$, *ed essendo v positivo, si ottiene* $v \geq 25$. *Quindi* $v_{min} = 25$ *Km/h*

Risposta: 0025

Problema 10 – Il treno 30 punti

Un treno che viaggia lungo la ferrovia che collega Genova a Savona è osservato da Marco che si trova su una barca, ferma in acqua; ad un certo momento il treno entra in una galleria e scompare alla vista di Marco per 26 secondi. Dopo un po' di tempo un secondo treno identico al primo, che si muove in direzione opposta, entra nella stessa galleria e anche in questo caso scompare alla vista di Marco per 26 secondi. Qualche giorno dopo un amico di Marco, che si trovava proprio su uno dei due treni, gli dice che quando i due treni si sono incrociati, per vedere passare dal finestrino tutto l'altro treno sono passati 4 secondi. Sapendo che la galleria è lunga 850 metri e supponendo che la velocità dei treni sia sempre costante, a che velocità (misurata in chilometri orari) viaggiava il treno dell'amico di Marco?

Soluzione.

La prima considerazione da fare è che i due treni si muovono con la stessa velocità, dal momento che percorrono la galleria nello stesso tempo. La seconda considerazione importante è che il tempo misurato da Marco è il tempo che intercorre dal momento in cui l'ultimo vagone del treno scompare alla sua vista sino al momento in cui la locomotrice si affaccia all'altro capo della galleria. Non bisogna quindi pensare semplicemente che la velocità del treno sia la lunghezza della galleria diviso il tempo calcolato da Marco, ma occorre tenere conto della lunghezza del treno.
Indicando con v la velocità del treno e con x la sua lunghezza, possiamo costruire il seguente sistema:

$$\begin{cases} v = \dfrac{(850 - x)}{26} \\ 2v = \dfrac{x}{4} \end{cases}$$

da cui otteniamo l'equazione

$$v = \frac{(850 - 8v)}{26}$$

ovvero

$$34v = 850, \qquad v = 25m/s = 90km/h$$

Risposta: $\boxed{0090}$

Problema 11 – La collezione 35 punti

Andrea colleziona piccoli modellini e li vuole sistemare in una bacheca quadrata, suddivisa in cellette quadrate tutte uguali fra loro. Procedendo per tentativi osserva che con una bacheca con *x* cellette per lato gli rimangono da sistemare 43 modellini, mentre con una bacheca con y cellette per lato gli restano 76 cellette vuote. Qual è il numero minimo di modellini che potrebbe possedere Andrea?

Soluzione.

Sia N *il numero di modellini in possesso di Andrea.*
Avremo
$N = x^2 + 43 = y^2 - 76$, *da cui*
$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 119$,
ma 119 =7×17 *oppure* 119 = 1×119. *Quindi:*
1) $y - x = 7$ e $y + x = 17$. *Avremo* $x = 5$ *e* $y = 12$, *da cui* $N_1 = 25 + 43 = 144 - 76 = 68$.
2) $y - x = 1$ e $y + x = 119$. *Avremo* $x = 59$ *e* $y = 60$, *da cui* $N_2 = 3481 + 43 = 3600 - 76 = 3524$.

Risposta: 0068

Problema 12 – Gli Onorevoli 35 punti

Ciascuno dei cinquecento Onorevoli della sfortunata Repubblica di Matematti, mentre siede nel suo seggio al Parlamento, fa le seguenti affermazioni. 1° Onorevole: “Non ci sono sinceri tra noi”, 2°: “C'è al massimo una persona sincera tra noi”, 3°: “Ci sono al massimo due persone sincere tra noi”, ..., 499°: “Ci sono al massimo 498 persone sincere tra noi”, 500° “Ci sono al massimo 499 persone sincere tra noi”. Quanti sono gli Onorevoli di nome e di fatto (cioè quelli sinceri..)?

Soluzione.

OSSERVAZIONE PRELIMINARE. *Sicuramente il primo Onorevole mente, perché, in caso contrario, sarebbe paradossale la sua affermazione.*
Supponiamo che il n° x dica la verità, allora diranno la verità anche i $500-x$ *dopo di lui, in totale* $500-x+1$. *Ricordando che l'affermazione di x è “Ci sono al massimo* $x-1$ *persone sincere tra noi” dovrà essere* $x-1 \geq 500-x+1$ *(in modo che sia vero che il numero di persone sincere é al massimo quello detto da x); da cui* $2x \geq 502$ *cioè* $x \geq 251$. *Quindi a partire dal* 251° *Onorevole dicono tutti la verità ed in particolare il* 251° *Onorevole dirà: “Ci sono al massimo* 250 *persone sincere tra noi”.*

Risposta: 0250

Problema 13 – Diamo i numeri? No, le cifre! 40 punti

Quali sono le prime quattro cifre (da sinistra, base dieci) del numero $2010^{15}:40401^{7}$?

Soluzione.

$$\frac{2010^{15}}{40401^{7}} = \frac{3^{15}\cdot 67^{15}\cdot 10^{15}}{\left((3\cdot 67)^{2}\right)^{7}} = \frac{3^{15}\cdot 67^{15}\cdot 10^{15}}{3^{14}\cdot 67^{14}} = 3\cdot 67\cdot 10^{15} = 201.000.000.000.000.000$$

Risposta: 2010

Problema 14 – Un polinomio “attuale” 40 punti

Sia dato il polinomio $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-2010)+ 20x^2 + 10$. Dopo che è stato portato in forma normale (ossia dopo che è stato espresso come somma di monomi non simili), quanto vale la somma dei suoi coefficienti?

Soluzione.

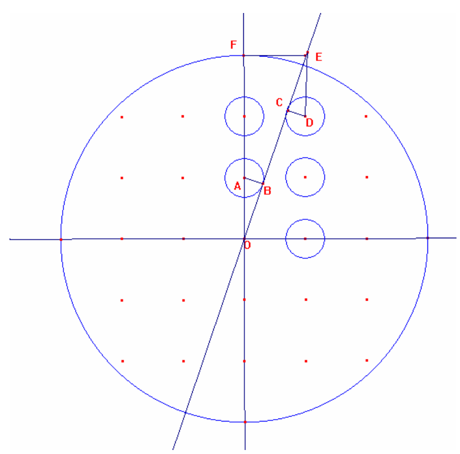
La somma dei coefficienti è uguale a $p(1) = 0 + 20 + 10 = 30$.

Risposta: $\boxed{0030}$

Problema 15 – Il frutteto 45 punti

Antonio possiede un frutteto di forma circolare avente raggio 3 decametri. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano avente come origine il centro del frutteto. Antonio vuole piantare un albero in ogni punto del frutteto avente coordinate intere (espresse in decametri). Assumendo per semplicità che tutti gli alberi siano cilindri di uguale raggio r e centro di coordinate intere (espresse in decametri), determinare il massimo valore di r in modo tale che, ponendosi al centro del frutteto (origine degli assi), sia possibile vedere orizzontalmente all’esterno del frutteto in almeno una direzione. Si esprima il risultato in millimetri.

Soluzione.



Con riferimento al disegno siano A(0,1) e D(1,2). Sarà possibile vedere all’esterno del frutteto dall’origine se esiste una retta passante per l’origine che non sia secante a nessuna delle circonferenze avente centro con coordinate intere. Per la simmetria del problema sarà sufficiente considerare una retta s che attraversi il primo quadrante e lasci da parti opposte i punti di coordinate (0,1) e (1,2). Il valore massimo di r sarà tale per cui la retta s sarà tangente alle due circonferenze di centri A e D e raggio r (se la retta fosse esterna a dette circonferenze, si potrebbe trovare un valore maggiore per r tale per cui le due suddette circonferenze risultino ancora esterne alla retta citata, e dunque r non sarebbe massimo). Siano B e C i punti di tangenza delle circonferenze, di centri rispettivamente A e D, con la retta s. Detta E l'intersezione di s con la retta x=1, i due triangoli OAB e ECD sono congruenti perché hanno gli angoli congruenti e $\overline{AB} = \overline{CD} = r$. Dunque $\overline{DE} = \overline{AO} = 1$, pertanto E sarà il punto (1,3). Sia ora F il punto (0,3). I triangoli OEF e OAB sono simili, pertanto AB : BO = EF : FO = 1 : 3. Per il teorema di Pitagora, $\overline{BO} = \sqrt{1-r^2}$, dunque otteniamo $\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{3}$ e, risolvendo, $r = \frac{\sqrt{10}}{10}$ decametri, dunque r = 3162,277… millimetri. Per completare si potrebbe mostrare con calcoli analoghi che una retta passante per l'origine che lasci da parti opposte la coppia di punti (0,1) e (1,1), la coppia (1,1) e (1,2), e la coppia (1,2) e (2,2), darebbe un valore di r minore di quello trovato sopra.

Risposta: 3162

Problema 16 – I pirati 50 punti

17 pirati rubano un sacco pieno di monete d'oro. Iniziano a dividerle in parti uguali, ma si accorgono che ne avanzano 3. Inizia quindi una rissa furibonda per suddividersi le monete rimaste. Nel corso della rissa un pirata rimane ucciso. I pirati suddividono nuovamente il bottino in parti uguali, ma si accorgono che ne avanzano 10. Nasce una nuova rissa nel corso della quale un altro pirata viene ucciso. A questo punto i pirati riescono finalmente a suddividere le monete in parti uguali. Qual è il numero minimo di monete che poteva contenere il sacco?

Soluzione.

$N = 17a + 3 = 16b + 10 = 15c$

Applico il modulo 16 all'uguaglianza 17a + 3 = 16b + 10: $a = 7 \pmod{16}$
Pertanto $a = 16k + 7$
L'uguaglianza 17a + 3 = 15c diventa: $17(16k + 7) + 3 = 15c$
da cui $272k + 122 = 15c$
Applico il modulo 15: $2k + 2 = 0 \pmod{15}$
Moltiplico per 8: $k + 1 = 0 \pmod{15}$
Sommo 14: $k = 14 \pmod{15}$
Pertanto $k = 15h + 14$
Da cui $N = 17a + 3 = 17(16k + 7) + 3 = 272k + 122$
$= 272(15h + 14) + 122 = 4080h + 3930$

Soluzioni possibili

h	*0*	*1*	*2*	…..
N	*3930*	*8010*	*12090*	…..

Risposta: 3930

Problema 17 – Un problema di aritmetica 50 punti

Quanti sono gli interi n, con $1 \le n \le 2010$ tali che n^2+1 sia divisibile per 13?

Soluzione.

Consideriamo i numeri 0, 1, 2,…, 11, 12 *e i loro quadrati modulo* 13:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Il numero n^2+1 *è divisibile per* 13 *se e solo se* $n^2 = 12$ (mod 13), *ossia se e solo se* $n = 5$, *oppure* $n = 8$ *modulo* 13. *Tra* 1 e $2002 = 13\times154$ *ci sono* $2\times154=308$ *valori possibili per n. Tra* 2003 *e* 2010 *abbiamo* 2007 *che è congruo a* 5 *modulo* 13 *e* 2010 *che è congruo a* 8 *modulo* 13. *In totale avremo* 308+2=310 *possibilità.*

Risposta: 0310

Problema 18 – Il calendario Maya 50 punti

Il calendario degli antichi Maya usa un sistema detto *Lungo computo* per contare i giorni a partire dall'inizio dell'era Maya: i giorni seguono una numerazione progressiva basata su un sistema posizionale misto nelle basi 13 (tredici), 18 (diciotto) e 20 (venti). Più precisamente ogni data è espressa da un numero di cinque cifre: la prima (quella delle "unità" più a destra) in base 20, la seconda (quella delle "decine") in base 18, la terza e la quarta in base 20, e la quinta in base 13.
Un esempio di data è 12.19.14.1.5; il giorno seguente è il 12.19.14.1.6, … il giorno successivo al 12.19.14.1.19 è il 12.19.14.2.0, … il giorno successivo al 12.19.14.17.19 è il 12.19.15.0.0 e così via.
Il 20 dicembre 2012 è il giorno 12.19.19.17.19 e rappresenta, secondo i Maya, la fine di un'era del mondo. L'era successiva inizia il 21 dicembre 2012. Quale è la data di oggi 12 marzo 2010 secondo il calendario Maya?
Per fornire la risposta si scrivano le ultime quattro cifre a destra ignorando i punti; per esempio se la data fosse il 12.19.11.5.7 si scriva 1157, se fosse il 12.19.1.0.8 si scriva 9108.

Soluzione.

Calcoliamo il numero di giorni dal 12/3/2010 *al* 20/12/2012: *esso è* 365 (*al* 12/3/2011) + 366 (*al* 12/3/2012 *poiché il* 2012 *è bisestile*) +19 (*al* 31/3/2012) + 30 (*aprile* 2012) + 31 (*maggio* 2012) + 30 (*giugno* 2012) + 31 (*luglio* 2012) + 31 (*agosto* 2012) + 30 (*settembre* 2012) +31 (*ottobre* 2012) + 30 (*novembre* 2012) + 20, *in totale* 1014 *giorni. Poiché* 1014 = **2** * (20 * 18) + **14** * 20 + **14** *possiamo scrivere il numero* 1014 *come* 0.0.2.14.14 *nella notazione del calendario Maya. Eseguiamo ora la sottrazione* 12.19.19.17.19 – 0.0.2.14.14 = 12.19.17.3.5. *Quindi il* 12/3/2010 *è il* 12.19.17.3.5 *e le ultime* 4 *cifre da considerare nella risposta sono* 1735.

Risposta: 1735

Problema 19 – Un poligono “attuale” 60 punti

Si consideri nel piano cartesiano una circonferenza avente centro nell’origine e raggio 1. In essa sia inscritto un poligono regolare avente 2010 lati e uno dei vertici nel punto $P_0(1,0)$. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_{2009}$ gli altri vertici. Indichiamo con x_n l’ascissa del punto P_n. Quanto vale $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2008}^2 + x_{2009}^2$?

Soluzione.

Detto $\alpha = 2\pi/2010$ *ed ordinando i punti in senso antiorario, si ha* $x_n = \cos(\alpha n)$*. Dalle formule di duplicazione del coseno,* $\cos^2(\alpha n) = [\cos(2\alpha n)+1]/2$.

Quindi $\sum_{n=0}^{2009} x_n^2 = \sum_{n=0}^{2009} \frac{\cos(2\alpha n)+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2009}\cos(2\alpha n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2009} 1 = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2010 = 1005$. *La somma* $\sum_{n=0}^{2009}\cos(2\alpha n) = \sum_{n=0}^{1004}\cos(2\alpha n) + \sum_{n=1005}^{2009}\cos(2\alpha n) = 2\sum_{n=0}^{1004}\cos(2\alpha n) = 0$ *perché* $\sum_{n=0}^{1004}\cos(2\alpha n) = 0$. *Infatti questa ultima quantità rappresenta l’ascissa del baricentro dei vertici del poligono regolare di 1005 lati inscritto nella circonferenza di raggio 1 e avente un vertice in (1,0): tale poligono è simmetrico rispetto all’asse delle ascisse e rispetto a qualsiasi retta passante per l’origine ed uno dei vertici, quindi il baricentro dovrà coincidere con l’intersezione di tutte queste rette che è l’origine stessa.*

Risposta: $\boxed{1005}$

Problema 20 – Calcolo enigmatico 70 punti

□□□□	:	□	=	□□□□
:		×		−
□	×	□□	=	□□□
□□□	+	□□□	=	□□□

A segno uguale corrisponde cifra uguale.

Quale numero corrisponde alla stringa □□□□ ?

Soluzione.

Sostituiamo per semplicità le lettere dell'alfabeto ai simboli:

$$\begin{array}{ccccc}
ABCC & : & D & = & IHAC \\
: & & \times & & - \\
E & \times & FC & = & BAC \\
\hline
GCC & + & HCC & = & ECC
\end{array}$$

1) *Poiché* $IHAC - BAC = ECC$ *otteniamo* $\mathbf{C=0}$.

2) *Da* $IHAC - BAC = ECC$ *otteniamo* $IH - B = E$ *e dunque* $E+B=IH\leq 18$, *quindi* $\mathbf{I=1}$ ($I=0$ *darebbe* $G+H=E$, $E+B=H$, *quindi* $B=-G=0$, $H=E$, *allora* $G \times E = AB$ *darebbe* $A=B=0$, *conseguentemente anche* $I=H=A=C=0$ *e dunque* $E=0$ *che è assurdo perché* E *appare come divisore in* $ABCC : E = GCC$).

3) *Considerando ora il prodotto della seconda colonna* $D \times FC = HCC$, *ovvero* $F\mathbf{0} \times D = H\mathbf{00}$, *si può dedurre che* $F \times D = H0$, *ovvero che il prodotto tra* F e D *è un multiplo di* 10; *quindi uno dei due fattori è* 5 *e l'altro deve essere pari* (*qui escludiamo che sia* $H = 0$, *altrimenti non potendo essere* D *zero perché divisore in una divisione,* $F = 0$ *e da qui* $B=A=H=0$, *ma allora* $IHAC-BAC= 1000 - 000$ *non potrebbe essere uguale a* ECC *che ha solamente tre cifre*).
Supponiamo $F=5$. *Essendo* $E \times F0 = BA0$, *ovvero* $E \times F = BA$, *avremo* $A=0$ *oppure* $A=5$. *Escludiamo* $A = 0$, *altrimenti* $ABCC : D = BCC : D = IHAC = 1H00$ *ma quest'ultimo numero non potrebbe avere* 4 *cifre.*
Da $ABCC : D = IHAC$ *otteniamo* $5B00 : D = 1H50$ *e dunque* $1H5 \times D = 5B0$ *e da qui, essendo* D *pari*, $D=4$. *Quindi* $1H5 \times 4 = 5B0$ *implica* $H=2$, $H=3$, *oppure* $H=4$. $H=2$ *implicherebbe* $B=0$ *che escludiamo perché* $IHAC - BAC = ECC$. $H=3$ *implica* $B=4$: *a questo punto è immediato determinare le altre cifre e si arriverebbe ad una contraddizione*. *Quindi* $H=4$ *e dunque* $B=8$. *Ma* $GCC \times E = ABCC$ *diventerebbe* $G00 \times E = 5800$, *quindi* $G \times E = 58$ *che è impossibile*.
In conclusione F *non può essere* 5 *e dunque* $\mathbf{D=5}$ e **F pari**.
Abbiamo

$$\begin{array}{ccccc}
AB\mathbf{00} & : & \mathbf{5} & = & \mathbf{1}HA\mathbf{0} \\
: & & \times & & - \\
E & \times & F\mathbf{0} & = & BA\mathbf{0} \\
\hline
G\mathbf{00} & + & H\mathbf{00} & = & E\mathbf{00}
\end{array}$$

4) $AB00 : 5 = 1HA0$ *implica* $1HA \times 5 = AB0$, *dunque* A *pari. Dovendo essere* $1HA \times 5 \geq 500$, $A\geq 5$, *dunque* A *può valere* 6 *oppure* 8. *Se* $A=8$, *allora* $G \times E = 8B$ *darebbe* $G=E=9$, *dunque* $H=0$ *da* $G00+H00=E00$, *pertanto* $F=0$, *ed allora* $E \times F0 = 0$ *darebbe* $B=A=0$: *contraddizione. Pertanto* $\mathbf{A=6}$.

5) *Da* $AB00 : 5 = 1HA0$ *abbiamo* $6B00 : 5 = 1H60$, *dunque* $1H6 \times 5 = 6B0$. *Allora* $H =2$ *oppure* $H=3$. Se $H=3$, *si ottiene* $B=8$, *e dunque* $G \times E = AB = 68$ *che è impossibile. Quindi* $\mathbf{H=2}$ e $\mathbf{B=3}$.

6) *Adesso è facile completare il quadro*: $1HA0 - BA0 = 1260 - 360 = 900$, *quindi* $\mathbf{E=9}$, *ma allora* $AB00 : E = 6300:9 = 700$, *quindi* $\mathbf{G=7}$, *ed infine si trova* $\mathbf{F=4}$.

In conclusione la soluzione unica è :

$$
\begin{array}{ccccc}
6300 & : & 5 & = & 1260 \\
: & & \times & & - \\
9 & \times & 40 & = & 360 \\
\hline
700 & + & 200 & = & 900
\end{array}
$$

La stringa □□□□ (IHAE) *rappresenta quindi il numero* 1269.

Risposta $\boxed{\textbf{1269}}$