Festa della Matematica

Logo di Stefano Visciglia

CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE
E
DEL COMUNE DI TORINO

GARA PER IL PUBBLICO

8 Gallery – Venerdì 20 marzo 2009

OLIMPIADI DI MATEMATICA

Problema 1 – Aritmetica Marziana 25 punti

I Marziani hanno imparato ad utilizzare le nostre cifre 0, 1, 2, 3 … e così via, ma ogni volta che trasmettono le loro somme con la radio interplanetaria sembra che i risultati siano tutti sbagliati! Molte somme usano simboli “extra” che noi non conosciamo. Questa somma “marziana” è invece composta da simboli che noi conosciamo:

18 + 9 = 22

Quante dita (o quanti tentacoli) presumi che abbia un marziano?

Soluzione.
Assumendo che il sistema di numerazione “marziano” sia posizionale ed indicando con x la base di tale sistema di numerazione (ovvero il numero di dita dei marziani), possiamo riscrivere la somma marziana come:

$1 \cdot x^1 + 8 \cdot x^0 + 9 \cdot x^0 = 2 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0$, quindi

$x + 8 + 9 = 2x + 2$, da cui $x = 15$.

Risposta: $\boxed{0015}$

Problema 2 – I dadi 20 punti

Lanciando a caso due dadi 18000 volte, quante volte, in media, si può prevedere che si presenterà una somma dei numeri delle due facce superiori uguale a 8?

Soluzione.
La probabilità P di ottenere una somma uguale a 8 nella singola prova è data dal rapporto tra i 5 casi favorevoli, cioè le coppie (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), ed i 36 casi ugualmente possibili, cioè tutte le possibili coppie ordinate di numeri che si possono ottenere nel lancio di due dadi:

$$P = \frac{5}{36}\cdot$$

Per la *legge dei grandi numeri* la frequenza relativa *f* di un evento in un grande numero di prove è approssimativamente uguale alla probabilità dell'evento nella singola prova e l'approssimazione è generalmente tanto migliore quanto più grande è il numero delle prove ripetute.
Quindi, detto *s* il numero di volte in cui, in media, si può prevedere che si presenti una somma di numeri delle due facce superiori uguale a 8, lanciando a caso i due dadi 18000 volte, possiamo scrivere:

$$f = \frac{s}{18000} = P = \frac{5}{36}$$

da cui:

$$s = 18000 \cdot \frac{5}{36} = 2500 \cdot$$

Risposta: $\boxed{2500}$

Problema 3 – La pozione magica 35 punti

Un siero magico deve avere una densità di 0,5 g/cm^3. Un giovane mago mescola 100 *ml* di un liquido di massa 50 *g* con 60 *ml* di acqua e 120 *ml* di un liquido sconosciuto di colore rosso, ottenendo un miscuglio con la giusta densità. Qual è la massa di 1 litro del liquido rosso adoperato, espressa in grammi?

Soluzione.
Il volume del miscuglio risulta V = 100 *ml* + 60 *ml* + 120 *ml* = 280 *ml* = 280 cm^3.
La massa del miscuglio è pertanto $M = 280\ cm^3 \cdot 0{,}5\ g/cm^3 = 140\ g$.
La massa del primo liquido è $m_1 = 50\ g$, la massa dell'acqua è $m_2 = 60\ g$.
La massa di liquido rosso introdotta nel miscuglio deve quindi essere:
$m_3 = M - m_1 - m_2 = 140\ g - 50\ g - 60\ g = 30\ g$.
La densità del liquido rosso è

$$d = \frac{30\ g}{120\ cm^3} = 0{,}25\ \frac{g}{cm^3}$$

La massa di 1 litro del liquido rosso adoperato risulta infine:

$$m = 0{,}25\ \frac{g}{cm^3} \cdot 1000\ cm^3 = 250\ g \cdot$$

Risposta: $\boxed{0250}$

Problema 4 – Il salvadanaio 15 punti

Pino e Daniele sono due fratelli che hanno entrambi un salvadanaio. Lo rompono e ci trovano rispettivamente 20,80 € e 69,46 €. La mamma aggiunge di suo quanto ha nel borsellino in quel momento, dividendo esattamente la cifra in due. Curiosamente, dopo aver aggiunto i soldi regalati dalla mamma, Daniele si ritrova con una somma esattamente doppia di quella del fratello Pino. Quanti soldi, espressi in centesimi di euro, aveva in tutto la mamma nel suo borsellino?

Soluzione.
Detta $2x$ la somma nel borsellino della mamma, si può impostare la seguente equazione:
$69{,}46 + x = 2(20{,}80 + x)$, da cui si trova $x = 27{,}86$. Quindi la somma cercata è di 55,72 €, cioè 5572 centesimi di euro.

Risposta: $\boxed{5572}$

Problema 5 – L' osservatorio astronomico 40 punti

Cinque compagni di classe vogliono andare la notte all'osservatorio astronomico per vedere le stelle cadenti, allora si sentono al pomeriggio per mettersi d'accordo. I messaggi che si scambiano sono i seguenti:

A Carla piace Marco quindi se lui va all'osservatorio ci va anche lei.
Carla e Marta vorrebbero andare all'osservatorio, ma hanno litigato e quindi se va una non va l'altra.
Paola ha detto che la notte starà con Marta.
Qualcuno all'osservatorio ci sarà senz'altro, Paola o Michele ci vanno.
Se Michele va all'osservatorio, ci vanno anche Marco e Marta.
…... ma allora chi va all'osservatorio e chi no?

Tenendo conto della seguente assegnazione:
Marco := 300, Carla := 400, Marta := 500, Paola := 2000, Michele := 1000 ,
si dia la risposta come somma dei numeri corrispondenti alle persone che vanno all'osservatorio.

***Soluzione 1** (in prima persona…!).*
Considero per iniziare la prima affermazione e costruisco una tabella di verità

Marco	Carla	Marta	Paola	Michele
V	V	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
F	F	V	V	V

Nelle celle evidenziate col grigio chiaro si esprimono le possibilità date dall'affermazione; si vede che manca il caso Vero per Marco e Falso per Carla perché contraddirebbe l'affermazione stessa.
Ora prendo in esame l'affermazione 2 e completo la colonna relativa a Marta (colore grigio più scuro). Il caso Falso per Carla e Falso per Marta non si può verificare perché creerebbe

contraddizione con le rimanenti affermazioni (non andrebbero Marco e Paola, quindi andrebbe Michele e dunque anche Marco il che non è possibile).
L'affermazione 3 mi fa ricopiare nella colonna di Paola gli stessi valori di Marta (coloro con lo stesso tono di grigio di Marta).
L'affermazione 4 mi costringe ad aggiungere una riga perché può verificarsi che vadano all'osservatorio Paola e Michele insieme.
Verifichiamo la tabella e la completiamo con il quinto messaggio: se è vero che Michele va all'osservatorio è vero che ci vanno anche Marco e Marta (contemporaneamente) ma è una contraddizione quindi Michele non va all'osservatorio, cioè l'unica riga valida della tabella è quella bordata spessa e con sfondo grigio scuro.
Quindi vanno all'osservatorio solo Marta e Paola: risultato = 2500.

Soluzione 2.
Consideriamo la seguente tavola di verità:

Michele	Paola	Marco	Marta	Carla
V	V	V	V	?
V	F	V	V	?
F	V	F	V	F

Essa parte dal considerare l'affermazione 4: almeno uno fra Michele e Paola va all'osservatorio (si esclude quindi il caso F e F relativo ai due).
Nel primo caso – prima riga – (affermazione 5) ci vanno pure Marco e Marta, ma Carla non avrebbe modo di scegliere (1^a affermazione si "scontra" con la 5^a).
Nel secondo caso – seconda riga della tabella – si ha analoga contraddizione del primo.
Nel terzo caso – terza riga – tutto funziona: Paola sta con Marta (Vero e Vero), quindi non va Carla. Non va neppure Marco sennò si contraddirebbe la 1^a affermazione.
Si conclude che all'osservatorio vanno solo Paola e Marta: risultato = 2500.

Risposta: 2500

Problema 6 – Il fattorino 50 punti

Un fattorino deve consegnare 4 diversi pacchi, uno blu, uno rosso, uno dorato ed uno argentato a 4 diverse persone: sig. Antonelli, sig. Bianchi, sig. Cellini, sig. Donati. Questi abitano ognuno in una via diversa fra via Garibaldi, via Mazzini, via Mameli e via Cairoli. I pacchi hanno costi diversi: 20 €, 30 €, 40 € e 50 €.
Le informazioni consegnate al fattorino sono le seguenti:

- Il pacco da 40 € deve essere portato in v. Mazzini.
- Il pacco blu deve essere portato in v. Cairoli.
- Il sig. Donati non ha speso né 20 €, né 40 €.
- La spesa del signore che abita in v. Garibaldi è più alta del prezzo del pacco rosso.
- Il pacco argentato costa 10 € più di quello che deve essere portato in v. Cairoli.
- I pacchi dei signori Bianchi e Cellini sono di colore metallico e costano più di quello del signor Donati.
- Il signor Cellini ha speso meno del signor Bianchi.

Aiutiamo il povero fattorino ad organizzare il suo giro!
La risposta va data nel seguente modo:
ai pacchi sono associati numeri: blu – 1, rosso – 2, dorato – 3, argentato – 4; quindi nel dare la risposta si devono indicare le cifre che corrispondono ai colori dei pacchi secondo la sequenza: pacco del sig. Antonelli, pacco del sig. Bianchi, pacco che va consegnato in via Mameli e infine quello che costa 40 €.

Soluzione.

Via Mazzini pacco da 40 € (prima informazione)	*Via Cairoli pacco Blu (seconda informazione)*	*Via Garibaldi prezzo > di quello del pacco rosso (quarta informazione)*	*Via Mameli rosso 20 € Sig. Antonelli*

Sig. Donati o 30 € o 50 € (terza informazione) blu Via Cairoli	*Sig. Bianchi argento 50 € ----------- > oro 50 € ---------------> (6^ informazione) Via Garibaldi*	*Sig. Cellini oro 40 € argento 40 € (6^ informazione) Via Mazzini*	

Pacco argentato prezzo pacco blu + 10 € (5^ informazione)			

Il signor Donati spende 30 €, allora il signor Cellini spende 40 e il sig. Bianchi 50.
Il pacco argentato può essere da 40 € o 50 € però il suo prezzo si ottiene sommando 10 € al pacco blu (via Cairoli) 40 € = 10 € + 30 € mentre 50 € lo ottengo da 10 € + 40 € (e i 40 € non corrispondono al pacco blu) → 30 € pacco blu.
Si riescono già a sistemare alcune vie con i signori e i pacchi con il loro prezzo.
Segue facilmente che il pacco rosso è da 20 € e deve essere in via Mameli.......
Il risultato è allora:

rosso - dorato - rosso - argento → 2324

Risposta: $\boxed{2324}$

Problema 7 – E' bello giocare a carte, ma… 50 punti

Quattro giocatori di carte usano un mazzo composto da 40 carte, 10 per ogni segno. Dopo averle mescolate il primo giocatore, che è Marco, riceve 10 carte….. gli altri attendono. Marco dice che è strano, ma non ha ricevuto nessuna carta di cuori (nel mazzo ce ne sono 10). Ora è il turno di Paola, la seconda giocatrice. Paola si chiede qual è la probabilità che anche lei non riceva nessuna carta di cuori. Fornire come soluzione il numeratore della frazione, irriducibile, che esprime la suddetta probabilità.

Soluzione 1.

La soluzione si esprime come il seguente rapporto

$$\frac{casi\ favorevoli}{casi\ \text{ugualmente}\ possibili}$$

Marco viene escluso dal ragionamento risolutivo, non ci interessano più le sue carte. Abbiamo da esaminare solo più 30 carte, di cui sappiamo che 10 sono di cuori. Il problema chiede di determinare la probabilità che fra le 10 carte di Paola non ce ne sia alcuna di cuori.

I possibili riordinamenti delle carte nelle tre mani sono 10!10!10! ma questo vale sia per i casi favorevoli, sia per i casi possibili, quindi è un termine che viene semplificato.

I casi possibili si vede facilmente che sono 30!. Per i casi favorevoli li contiamo così:

prima scegliamo una per una le carte di Paola e le scegliamo fra le 20 carte non di cuori, queste le possiamo scegliere in $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot ...... \cdot 11 = \frac{20!}{10!}$ *modi differenti, per le altre 20 carte le scelgo in modo indifferente, senza cioè vincoli e quindi in 20! modi differenti. Queste 2 scelte sono indipendenti l'una dall'altra quindi le moltiplicherò fra loro.*

Casi favorevoli: $\frac{20! \cdot 20!}{10!}$

la probabilità calcolata sarà allora:

$$\frac{20! \cdot 20!}{10! \cdot 30!} = \frac{4 \cdot 17 \cdot 19}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 23 \cdot 29} = \frac{1292}{210105} = 0{,}006149306299\ldots\ldots\ldots$$

Soluzione 2.

Marco viene escluso dal ragionamento risolutivo, non ci interessano più le sue carte. Abbiamo da esaminare solo più 30 carte, di cui sappiamo che 10 sono di cuori. Il problema chiede di determinare la probabilità che fra le 10 carte di Paola non ce ne sia alcuna di cuori.

Il problema si può tradurre nel calcolare la probabilità che Paola ha di scegliere 10 carte delle 20 carte non di cuori in un mazzo di 30 carte. Avremo quindi:

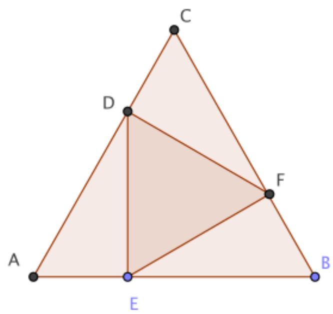
$$\frac{\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}} = \frac{\frac{20!}{10!10!}}{\frac{30!}{10!20!}} = \frac{\frac{20!}{10!}}{\frac{30!}{20!}} = \frac{20! \cdot 20!}{10! \cdot 30!} = \frac{4 \cdot 17 \cdot 19}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 23 \cdot 29} = \frac{1292}{210105} = 0{,}006149306299\ldots\ldots\ldots$$

Risposta: $\boxed{\textbf{1292}}$

Problema 8 – Un po' di geometria 25 punti

Sia ABC un triangolo Equilatero e DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto con AB perpendicolare ad ED. Qual è il rapporto fra le aree di ABC e DEF ?

Soluzione.



Si considerino i triangoli ADE e BEF: essi sono congruenti perché $DE \cong EF$, $A\hat{D}E \cong B\hat{E}F$ e per l'appunto $B\hat{E}F = 180° - 90° - 60° = 30° = A\hat{D}E$
Segue quindi che

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AE} + \overline{AD} = \overline{AE} + 2\overline{AE} = 3\overline{AE}$$

e di conseguenza

$$\overline{AB} = 3\overline{AE} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{DE} = \sqrt{3} \cdot \overline{DE}.$$

Quindi il rapporto fra le aree dei due triangoli è 3.

Risposta: 0003

Problema 9 – Un po' di algebra 25 punti

Scrivere le prime 4 cifre (senza tener conto dell'eventuale virgola) della soluzione maggiore dell'equazione $1+1/(1+1/(1+1/x)) = x$.

Soluzione.

Scrivo l'espressione come

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

quindi per $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -\frac{1}{2}$ *operando per semplificazioni successive ottengo*

$$x = 1 + \frac{1+x}{1+2x} \quad e \;\; poi \quad x = \frac{2+3x}{1+2x}$$ *che diventa un'equazione di secondo grado*

$$x^2 - x - 1 = 0$$ *la quale ha 2 soluzioni:* $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ *e la soluzione maggiore è:*

1,6180.

Risposta: 1618

Problema 10 – Diamo i numeri? No, le cifre! 25 punti

Da quante cifre decimali e' composto il numero $5^{2009} \cdot 16^{502}$?

Soluzione.
Da 2009 cifre. Infatti $5^{2009} \cdot 16^{502} = 5^{2009} \cdot 2^{2008} = 5 \cdot 10^{2008}$.

Risposta: $\boxed{2009}$

Problema 11 – Data fatale 20 punti

L'11 settembre 2001 era un martedì. Che giorno era l'11 gennaio 2004? (rispondere con lunedì = 1, martedì = 2, ecc..)

Soluzione.
La risposta esatta è 7, domenica. L'11 settembre 2003 è venuto dopo 730 giorni, dunque era 730/7 = 104 con resto di 2, un giovedì. 122 giorni dopo era l'11 gennaio 2004, dunque 122/7= 17 con resto di 3, domenica.

Risposta: $\boxed{0007}$

Problema 12 – Ladro gentiluomo 25 punti

Arsenio Lupin vuole rubare la corona della regina di Inghilterra. Una volta aperta la cassaforte trova 20 corone uguali, una è quella vera e le altre sono solo delle copie. La cattiva notizia è che per uscire da dove è entrato non puo' prenderle tutte e ha solo 4 minuti per scegliere quella giusta. La buona notizia è che ha con sé una bilancia a piatti e sa che quella vera è più pesante delle altre, le quali hanno tutte lo stesso peso. Qual è il numero minimo di pesate che sicuramente (escludendo casi fortuiti) gli permettono di scoprirla?

Soluzione.
Tre. Prima si pesano due gruppi di nove corone ciascuno. Se pesano ugualmente, la corona autentica è una delle due escluse: pesandole la si individua. Altrimenti si prende il gruppo più pesante e lo si divide in tre corone su un piatto e tre su un altro. Individuata la terna più pesante, con la terza pesata si scopre la corona "vera".
Si osservi infatti che con una bilancia si possono "confrontare" tre gruppi di oggetti (due gruppi distribuiti sui piatti della bilancia ed il terzo esterno).
Con una pesata si determina l'originale tra tre corone, con due tra nove corone e con N tra 3^N corone. Avendo 20 oggetti due pesate non sono, in generale, sufficienti.

Risposta: $\boxed{0003}$

Problema 13 – Maestre e caramelle ! 15 punti

In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li suddivide in 5 gruppi di 6 alunni e poi organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio delle caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre. Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore?

Soluzione

Ogni perdente riceve N caramelle ed ogni vincitore 2N essendoci 6 vincitori e 24 perdenti è sufficiente impostare la seguente equazione $6 \cdot 2N + 24 \cdot N = 540$ da cui N = 15, quindi ciascun vincitore ne riceve 30.

Risposta: $\boxed{0030}$

Problema 14 – Le perle del Rajah 35 punti

Un Rajah, morendo, lasciò alle figlie un certo numero di perle ordinando che fossero suddivise nel seguente modo: la figlia maggiore avrebbe avuto una perla e un settimo delle rimanenti. La seconda avrebbe avuto due perle ed un settimo di quelle che rimanevano, la terza figlia avrebbe avuto tre perle ed un settimo di quelle che rimanevano e così via. L'ultima si lamentò che la suddivisione non fosse equa, ma in realtà a ciascuna figlia toccò lo stesso numero di preziosi.

Quante erano le perle totali?

Soluzione

Indichiamo con x il numero delle perle; allora si ha che la prima figlia ha $1+\frac{x-1}{7}=\frac{x+6}{7}$ perle.

Quelle rimanenti saranno dunque $x-\frac{x+6}{7}=\frac{6x-6}{7}$.

La seconda figlia avrà quindi un numero di perle pari a :

$$2+\frac{1}{7}\left(\frac{6x-6}{7}-2\right)=\frac{78+6x}{49}$$

A questo punto si impone l'uguaglianza tra il numero di perle della prima figlia e quelle della seconda:

$$\frac{x+6}{7}=\frac{78+6x}{49},$$

da cui, risolvendo, si trova che il numero di perle è $x=36$.

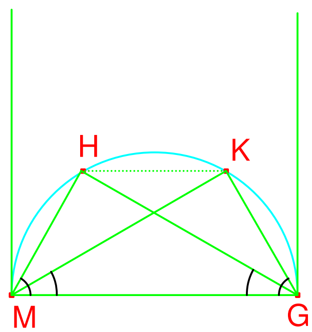
Risposta: $\boxed{0036}$

Problema 15 – Problemi da … bagnanti **30 punti**

Mario e Gino si trovano sulla riva di una spiaggia rettilinea alla distanza di 2,5 *Km* l'uno dall'altro. Due barche H e K si trovano nel tratto di mare compreso tra i due (cioè compreso tra le due semirette perpendicolari alla spiaggia e passante per i due punti di osservazione). Mario vede la barca H sotto un angolo di 60° e la K sotto un angolo di 30°, Gino vede la barca K sotto un angolo di 60° e la barca H sotto un angolo di 30°. A quale distanza (in *metri*) si trovano le due barche?

Soluzione.

Consideriamo il disegno in figura. Si noti l'evidente simmetria …



(Mario sta in M e Gino in G, ovviamente)

I triangoli MHG e MKG sono congruenti (2° criterio) e sono rettangoli in H e K (somma angoli interni = 180°). Avendo in comune l'ipotenusa, si possono inscrivere in una semicirconferenza di diametro MG. Ora, poiché i loro angoli misurano rispettivamente 30°, 60°, 90°, il cateto minore è metà dell'ipotenusa ed è uguale al raggio della semicirconferenza di cui sopra. Anche HK è congruente al raggio: il trapezio isoscele MGKH è metà esagono inscritto (il cui lato è congruente appunto al raggio). Si ha quindi:

$$\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{MG} = \frac{2{,}5}{2}Km = 1{,}25Km = 1250m\,.$$

Risposta: $\boxed{1250}$

Problema 16 – Il rettangolo "attuale" **35 punti**

Nadia ha perso una pagina dei suoi appunti di matematica. Sul foglio perso c'era un problema con un rettangolo. Nadia ricorda che i lati del rettangolo avevano lunghezza espressa da due numeri interi e la diagonale era uguale a $\sqrt{2009}$. Sapresti aiutarla a trovare il perimetro del rettangolo?

Soluzione.

Determiniamo i lati: per il teorema di Pitagora sono le soluzioni intere positive di $x^2 + y^2 = 2009$. Poiché $2009 = 41 \bullet 7^2$, e $41 = 4^2 + 5^2$, troviamo facilmente $x = 4 \bullet 7 = 28$ e $y = 5 \bullet 7 = 35$ (o viceversa $x = 35$ e $y = 28$). In tal caso il perimetro richiesto vale $2 \bullet (28 + 35) = 126$. Mostriamo che non ci sono altre soluzioni. Dimostriamo dapprima che sia x, sia y sono multipli di 7. Infatti le classi di resto dei quadrati (modulo 7) sono 0, 1, 2, 4 quindi x^2 e y^2 possono essere solamente 0, 1, 2, 4 modulo 7. Dato che $x^2 + y^2 = 0$ modulo 7, allora $x^2 = y^2 = 0$ modulo 7, e dunque $x = y = 0$ modulo 7. Ponendo $x = 7a$ e $y = 7b$, otteniamo $a^2 + b^2 = 41$ che ha come uniche soluzioni intere $a = 4$ e $b = 5$ o, viceversa, $a = 5$ e $b = 4$. Ritroviamo quindi per x e y i valori $4 \bullet 7 = 28$ e $5 \bullet 7 = 35$.

Risposta: **0126**

Problema 17 – Differenza di quadrati 50 punti

Il numero 2009 si può scrivere come differenza di due quadrati di numeri interi positivi in più modi diversi, ossia l'equazione $x^2 - y^2 = 2009$ ammette più di una coppia di soluzioni intere. Quanto vale la somma di tutti gli x e y che sono soluzioni della precedente equazione?

Soluzione.
Si ha $(x + y)(x - y) = 2009$ con $x > y$. I numeri $x + y$ e $x - y$ sono dunque interi e positivi. Il numero 2009 ha 6 divisori: 1, 7, 41, 49, 287 e 2009. Poiché è $x + y > x - y$, i valori possibili per $x + y$ sono 49, 287, 2009 (cui corrispondono per $x - y$ rispettivamente 41, 7, 1). Abbiamo pertanto tre coppie diverse di soluzioni (si potrebbero pure determinare ma non è necessario: $1005^2 - 1004^2$, $45^2 - 4^2$ e $147^2 - 140^2$) e la somma di tutte è pari alla somma dei valori possibili per $x + y$, cioè $49 + 287 + 2009 = 2345$.

Risposta: **2345**

Problema 18 – I numeri primi con 2009 40 punti

Quanti sono i numeri interi positivi e minori di 2009 tali che il loro massimo comun divisore con 2009 sia uguale ad 1?

Soluzione.
I divisori primi di 2009 sono 7 e 41. Tra i numeri minori di 2009 i multipli di 7 sono $2009/7 - 1 = 286$, i multipli di 41 sono $2009/41 - 1 = 48$ e i multipli di $41 * 7$ sono $2009/(41*7) - 1 = 6$. Quindi il numero richiesto è $2008 - (286 + 48 - 6) = 1680$.
In alternativa, se si conosce la funzione ϕ di *Eulero*, $\phi(2009) = \phi(41)\,\phi(7^2) = 40(49 - 7) = 1680$.

Risposta: **1680**

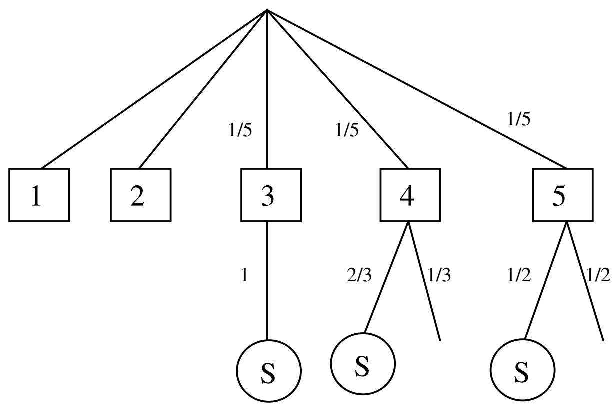
Problema 19 – Scelta del fidanzato 70 punti

Cinzia è alla ricerca di un fidanzato e si è iscritta ad una agenzia matrimoniale. Le verranno presentati cinque ragazzi in cinque serate diverse: alla fine di ogni serata potrà decidere se scegliere il ragazzo che ha incontrato oppure scartarlo. Se ne scarta uno non le è più consentito di prenderlo in considerazione. Per aver la maggior probabilità possibile di scegliere il migliore adotta questa strategia: decide di lasciar passare comunque i primi due e di scegliere tra i successivi il primo che risulti migliore di tutti quelli che lo hanno preceduto. Che probabilità ha di scegliere il migliore? (<u>esprimere il risultato considerando le prime quattro cifre decimali</u>).

Soluzione.
La strategia di Cinzia ha successo se:

- Il migliore non è tra i primi due
- Tra i ragazzi che precedono il migliore, il migliore tra essi è tra i primi due, in modo che Cinzia non sia indotta a scegliere un migliore relativo rispetto ai precedenti, ma che non è il migliore assoluto.

Consideriamo il grafo:



I rettangoli rappresentano la posizione del migliore che ha probabilità pari ad 1/5 di essere in prima, seconda, terza, quarta o quinta posizione. Se è in terza posizione viene scelto sicuramente, se è in quarta viene scelto se tra i tre che precedono il migliore relativo occupa una delle prime due posizioni (probabilità 2/3), se è in quinta posizione viene scelto se il migliore relativo tra i quattro che precedono occupa una delle prime due posizioni (probabilità 2/4 = 1/2); nel grafo la S indica successo. Quindi la strategia ha successo con probabilità

$$\frac{1}{5}1+\frac{1}{5}\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\frac{1}{2}=\frac{13}{30}=0{,}4333...$$

Risposta: $\boxed{4333}$

Problema 20 – Per chi bacia da dio…! 25 punti

Apollo nota Dafne da una distanza di 12114 *m* (vede da dio…!) e le corre incontro alla velocità costante di 12 *m/s* (corre da dio...!). Dopo 5 secondi, Dafne si accorge di Apollo (vede da ninfa…!) e fugge, senza troppa convinzione (!), alla velocità costante di 6 *m/s*. Dopo quanti secondi Apollo riuscirà a strapparle un bacio?

Soluzione.
Dopo 5 secondi Apollo avrà percorso 60 *m*, dunque la loro distanza reciproca si è ridotta a 12054 *m*. Poiché Apollo corre 6 *m/s* più veloce di Dafne, impiegherà
$t=\dfrac{12054}{6}$ secondi per raggiungerla. Cioè t = 2009 secondi.

Risposta: $\boxed{2009}$